

# Theories of Probability

## Musings on a 30th Anniversary

---

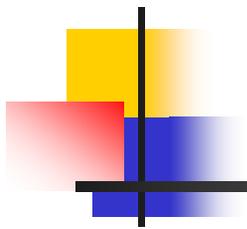
Terrence L. Fine

School of Electrical and Computer Engineering,

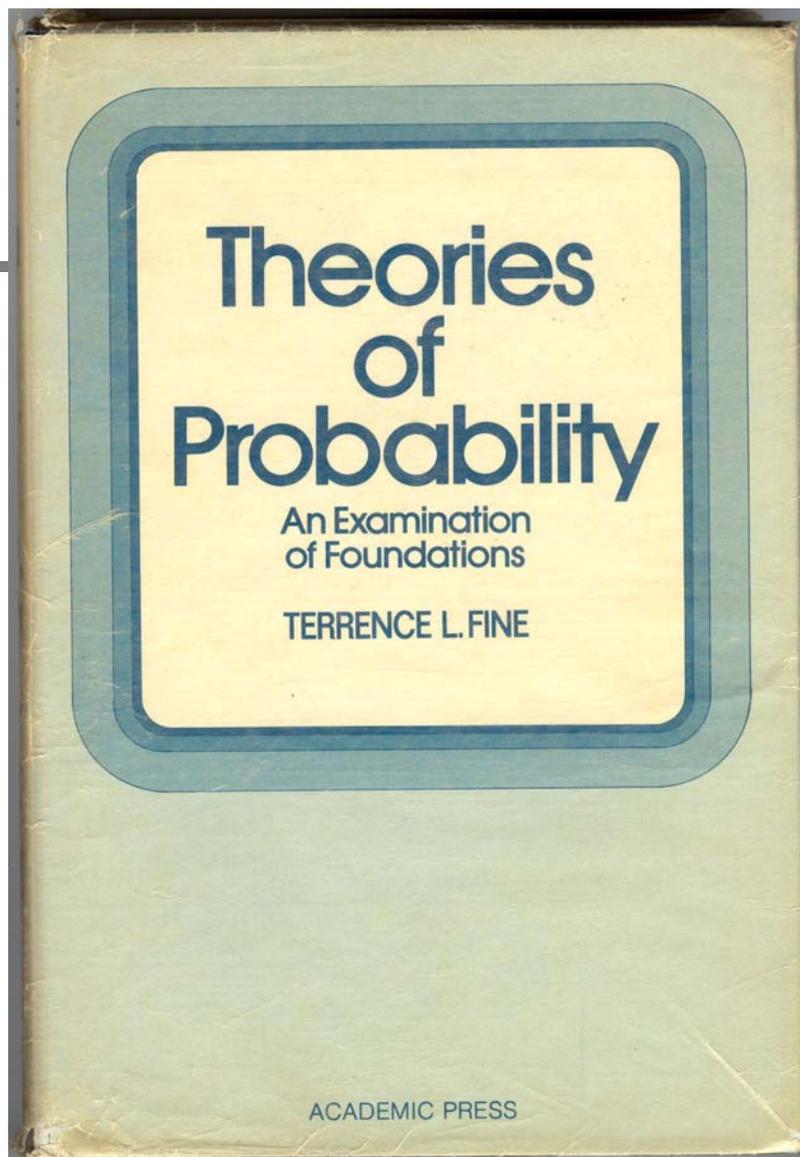
Center for Applied Mathematics, &

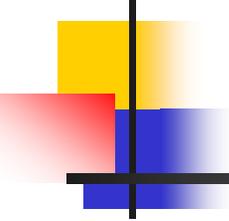
Dept. of Statistical Science,

Cornell University



April 1973

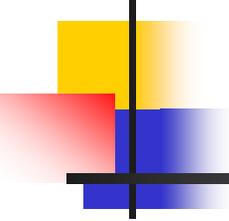




# Taking It Personally: People

---

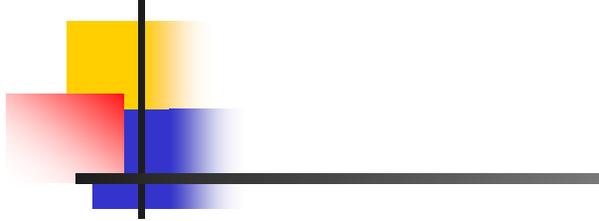
- Andrei N. Kolmogorov
- Jimmie (L.J.) Savage
- Max Black
- Patrick Suppes



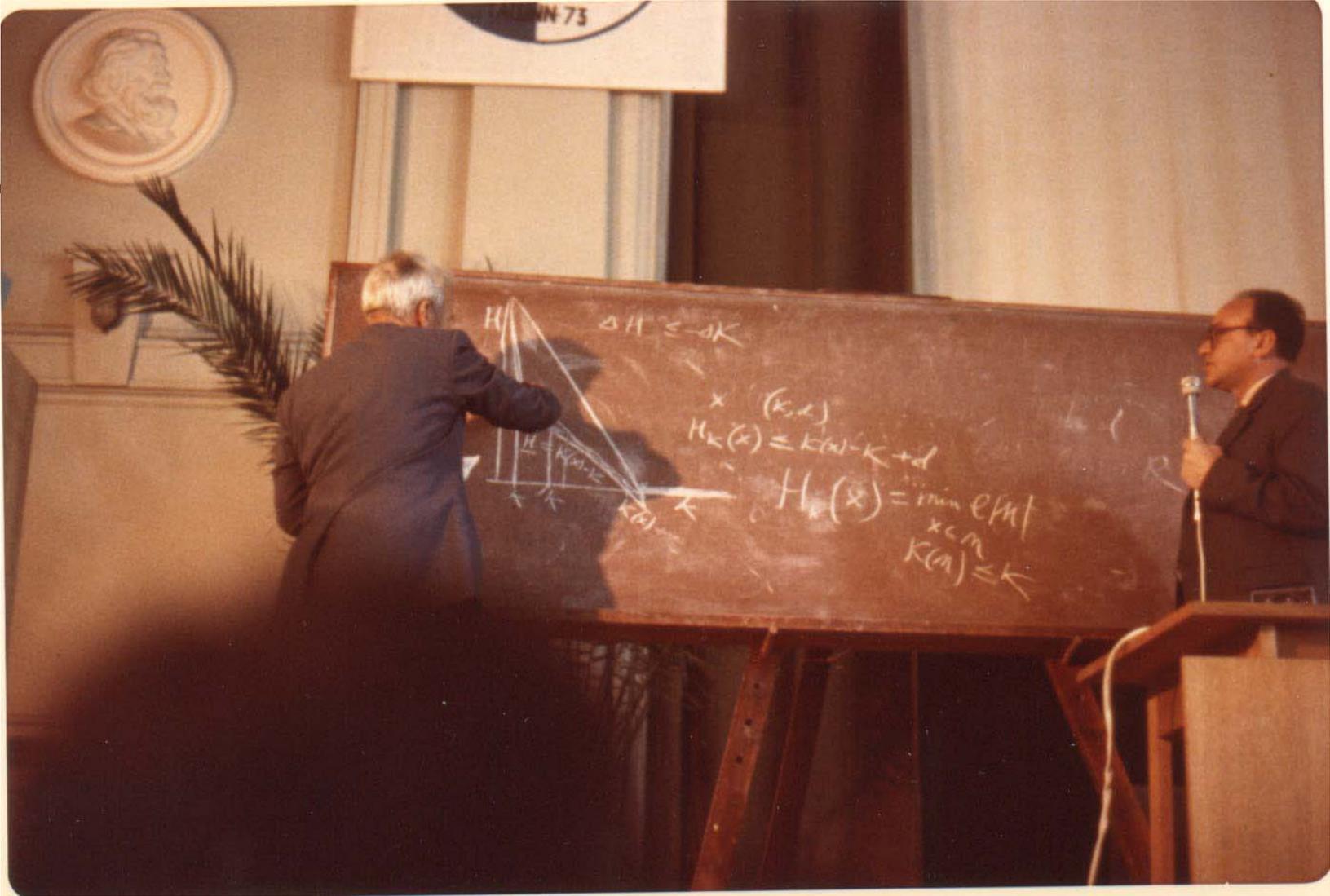
# A.N. Kolmogorov, June 1973

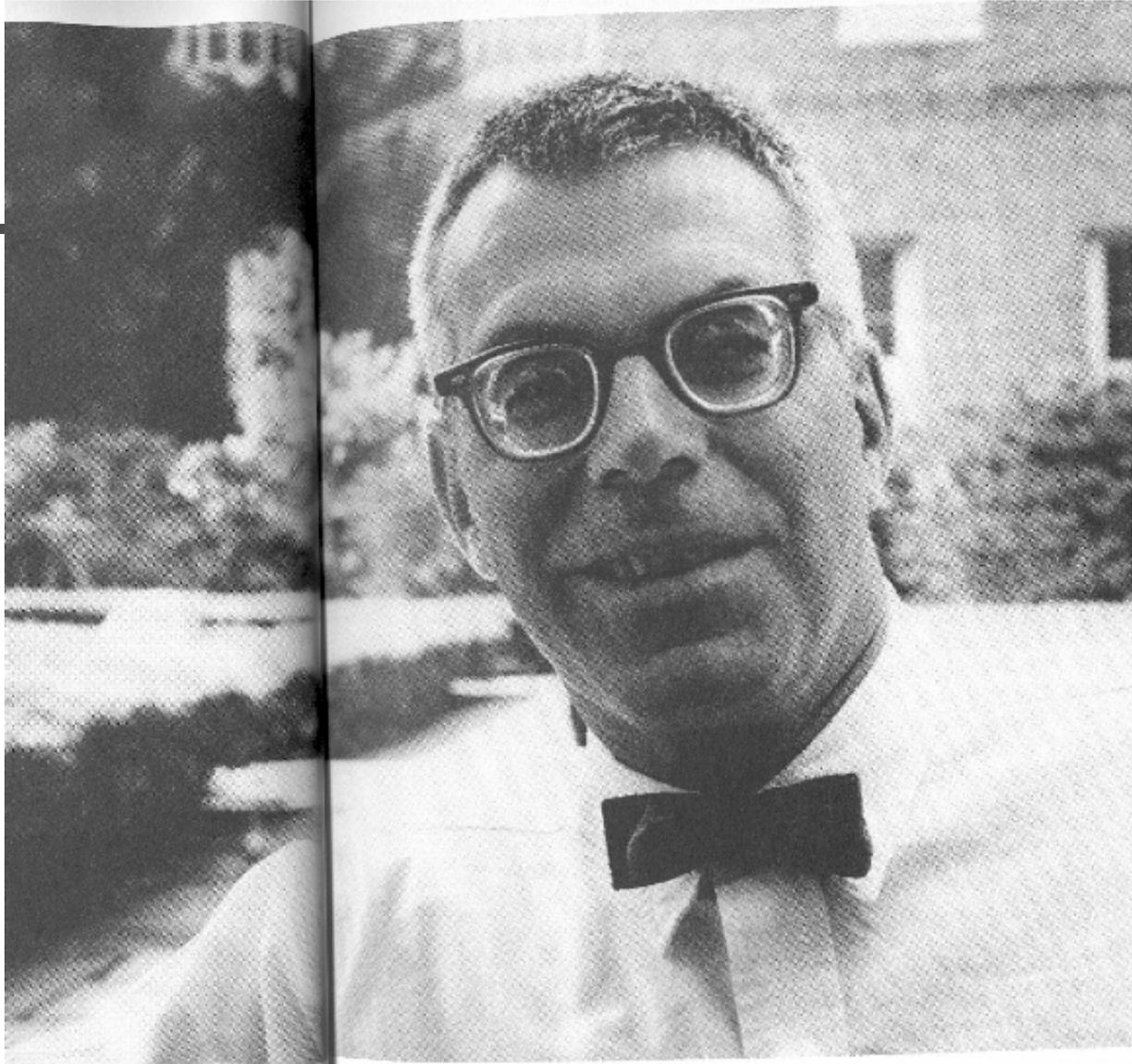
---



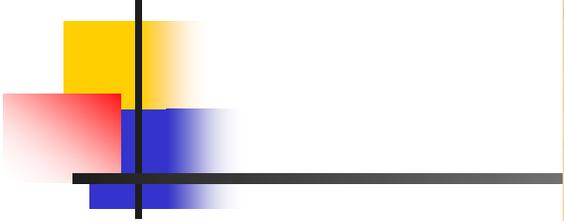


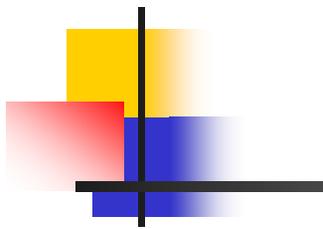
7/29/2003

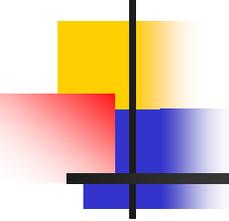




7/29/2003







# Outline of Reflections

---

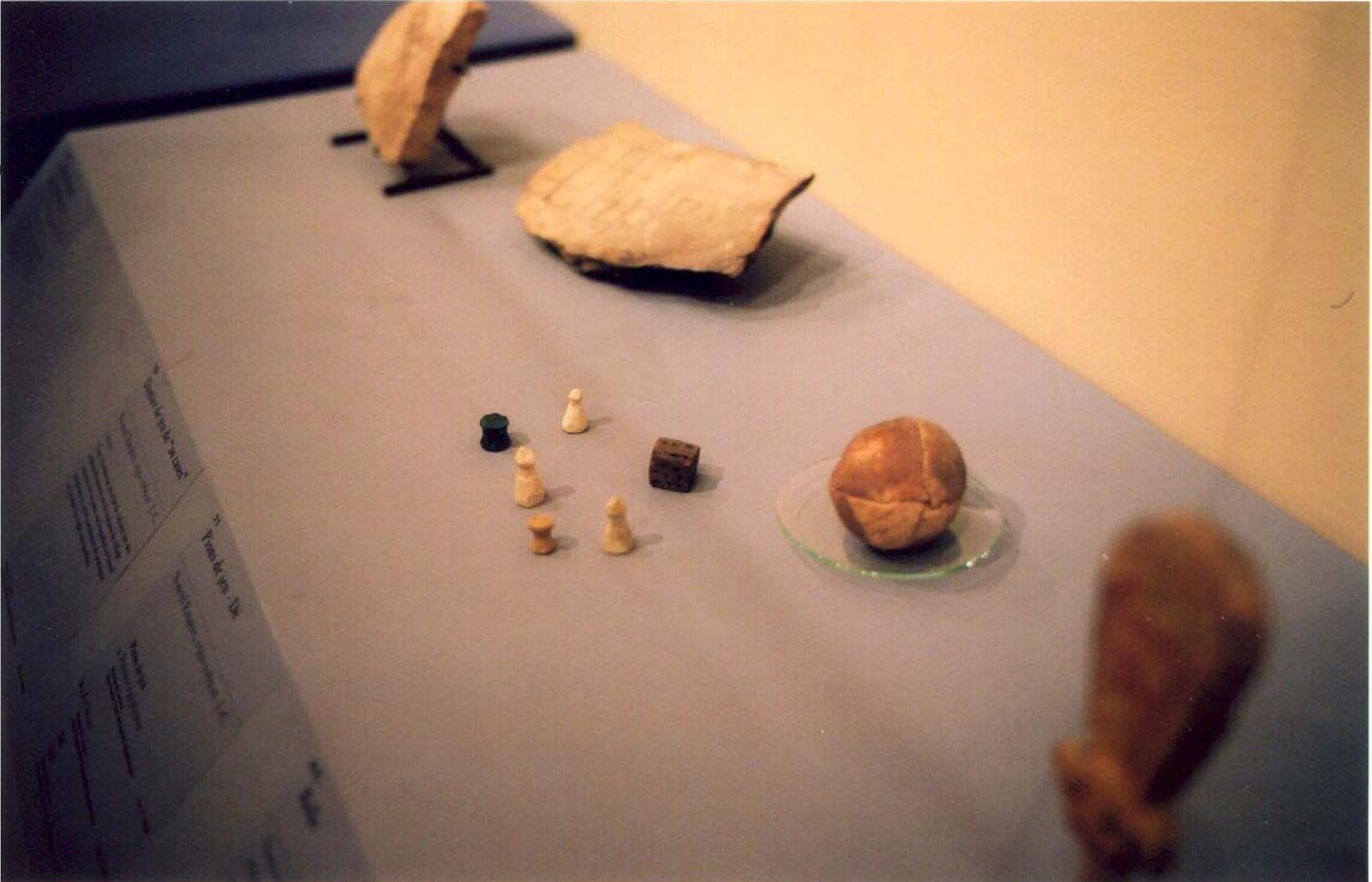
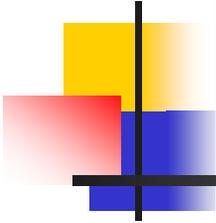
- **Pointing to the Subject of Probability**
- Probabilistic Reasoning
- FoP Matters
- ToP
- Ruling Triumvirate
- Meaning
- Representation
- Axioms
- Closing

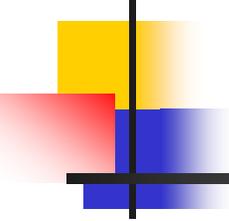
# Pointing to the Subject

## Origins-Egypt, c. 1500BCE

- Do we learn from history or select from it?



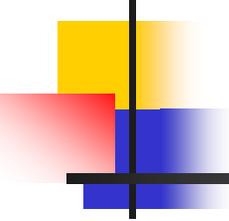




# Lucretius, De Rerum Natura, II, c. 50 BCE

---

- id facit exiguum clinamen principiorum  
nec regione loci certa nec tempore certo.

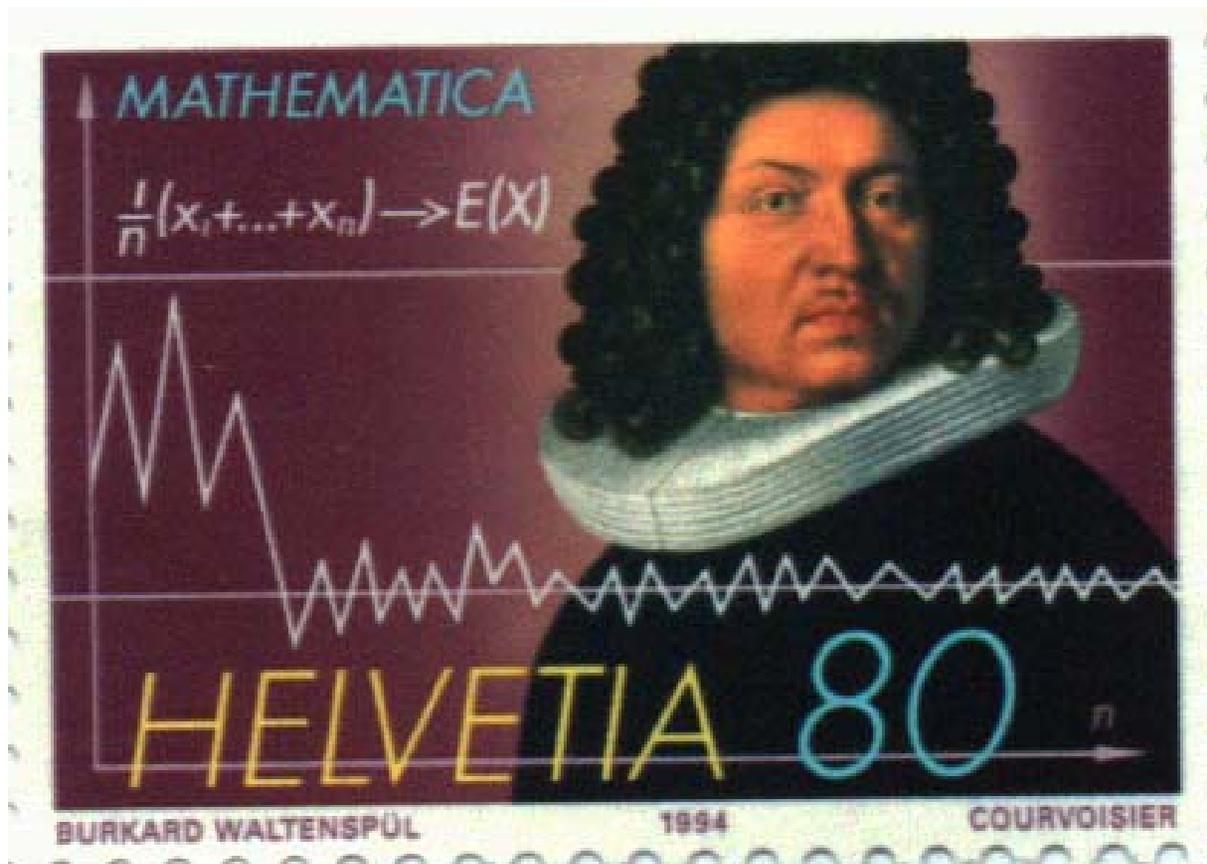


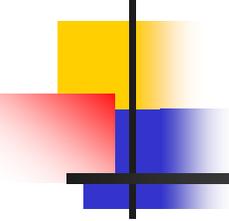
# Leibniz & $[0,1]$

---



# Jacob Bernoulli (Basel)

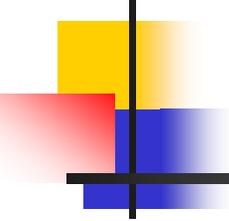




# Pointing to the Subject

---

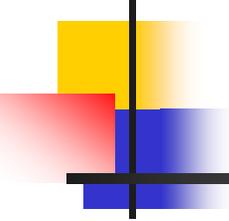
- **Focal keywords**: random, chance, likelihood, probably, uncertainty, support, inference, prediction, decision
- **State of affairs**-partially known by, and with consequences for, a probabilistic reasoner (PR)
- PR need be no more subjective than is engineering



# Common Realms of Discourse

---

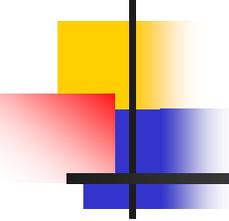
- Natural--motion of air, water, magma, plasma, distribution of resources
- Physical--particle decay, galaxy pattern
- Biological--mutation, evolution,...
- Societal--unk unks, unintended conseq.
- Evidentiary--natural lang., legal, AI



# Outline of Reflections

---

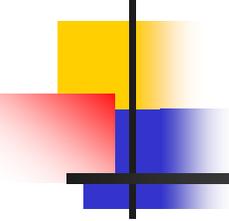
- Pointing to the Subject of Probability
- Probabilistic Reasoning
- FoP Matters
- ToP
- Ruling Triumvirate
- Meaning
- Representation
- Axioms
- Closing



# Methodology

---

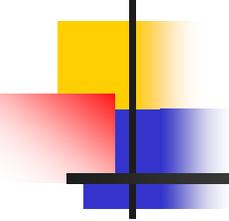
- PR is more than probability theory---statistics, estimates, inferences, decision making,...
- How can we judge adequacy outside of the methodology itself?
- Is self-consistency sufficient or at best necessary? (Frequentist probability and LLNs)
- “But, it works!” Is a pragmatic stance sufficient or defeatist? How do we know what “works” or is possible?



# Self-consistency

---

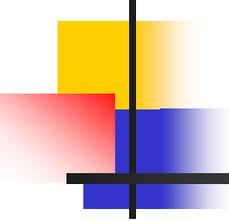
- From probability model  $M$  to data  $D$ ---  
typicality, simulation, prediction, decision
- From  $D$  to  $M$ ---estimation, inference
- Model similarity criterion
- End-to-end consistency!



# Outline of Reflections

---

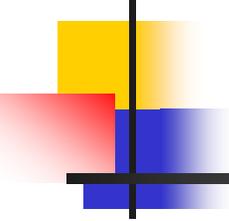
- Pointing to the Subject of Probability
- Probabilistic Reasoning
- **FoP Matters**
- ToP
- Ruling Triumvirate
- Meaning
- Representation
- Axioms
- Closing

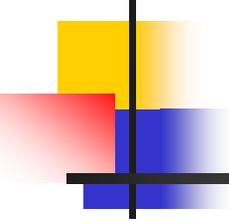


# Foundations Matter!

---

- It is not about neatly organizing what we all agree on!
- **Foundational choices have real-world consequences.**
- Foundations of probability are much closer to the surface of the applications of probability than are the foundations of arithmetic to accounting or the foundations of physics to physics (Suppes 98) or to engineering.

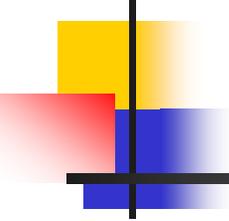
- 
- 
- Disagreements over foundations lie at the root of controversies over concepts of probability and statistical practice.
  - What are the boundaries of probabilistic reasoning?
  - How should we develop its content?



# Theories of Probability (ToP)

---

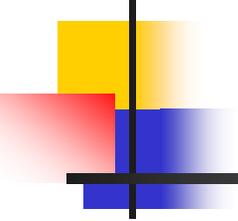
- What counts as a theory of probability and what does not?
- Not everything that can be graded is probability.
- Single concept of probability cannot accommodate to all realms of discourse and to all purposes.
- Imperialist/Dogmatic claims---eliminating the feet that do not fit the shoe.

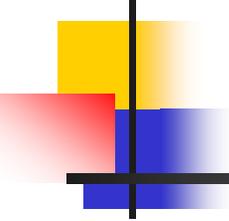


# Desiderata for a ToP

---

- Probability is graded potential, propensity, belief, or evidential support.
- Gradations of potential or propensity exceed their evidential bases.
- But, this is also true of physical laws.
- Are there evidential bases for grading strength of beliefs?

- 
- 
- Gradation monotonic with respect to implication or event containment.
  - But also ...[cancellation, extremal elements]
  - How fine-grained is the gradation?
  - Is probability fundamental or merely supervenient or a placeholder?



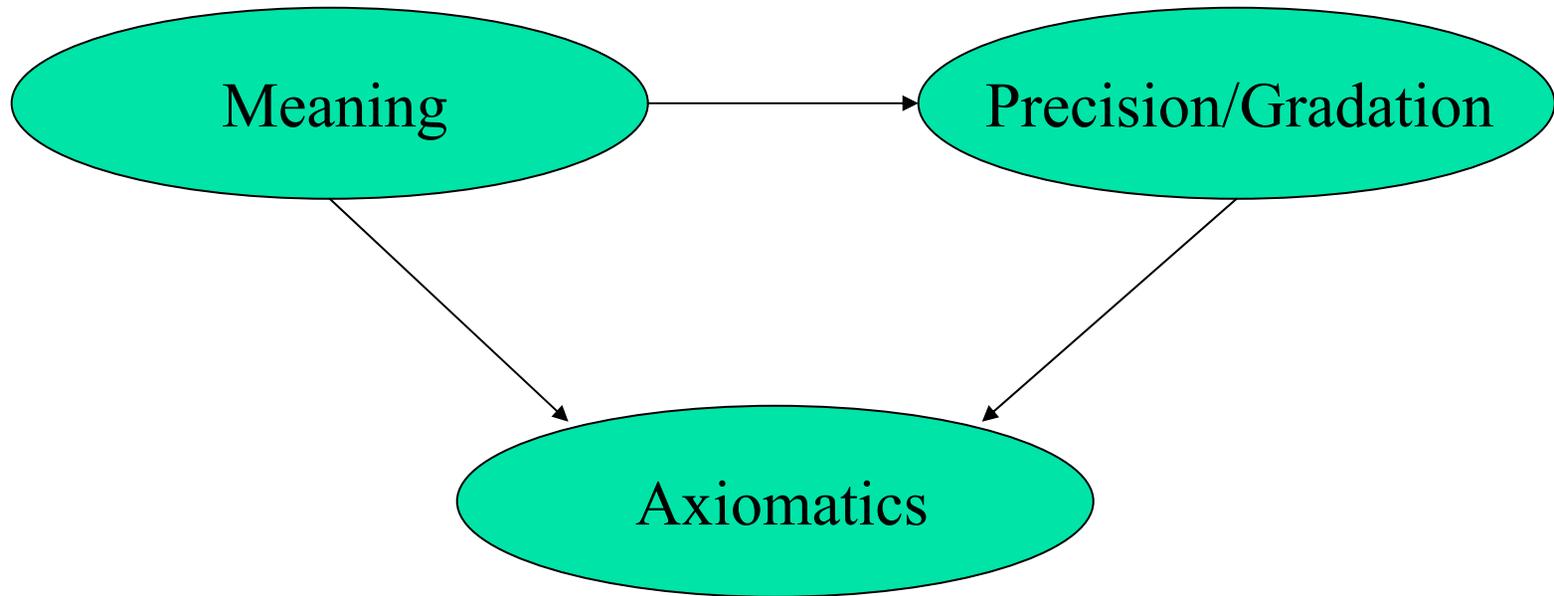
# Outline of Reflections

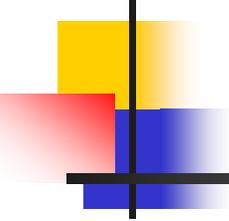
---

- Pointing to the Subject of Probability
- Probabilistic Reasoning
- FoP Matters
- ToP
- **Ruling Triumvirate**
- Meaning
- Representation
- Axioms
- Closing

# The Ruling Triumvirate

- Meaning, Measurement, Mathematics

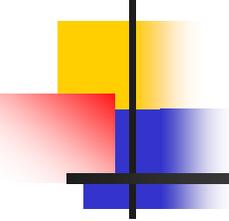




# Meaning

---

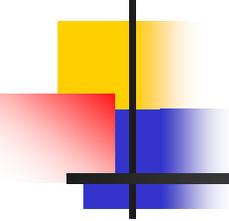
- Primary importance --use of word  
``interpretation`` subordinates it to axioms
- Philosophers have a say here
- Subjective/individual (gradation of belief)
- Objective logical/formal (gradation of epistemic support)
- Objective empirical/scientific (gradation of tendency to occur)
- What else?



# Bruno de Finetti

---





# Attending to the Objective/Empirical

---

- ISIPTA and others have shown a marked preference for the subjective and personalistic view of probability.
- The subjective view profits from the mind's limited insight into the brain.
- PROBABILITY DOES EXIST
- Objective empirical probability is far too important to suffer neglect.

# Max Born (June 1926)

863

## Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge.

[Vorläufige Mitteilung.<sup>1)</sup>]

Von Max Born, Göttingen.

(Eingegangen am 25. Juni 1926.)

Durch eine Untersuchung der Stoßvorgänge wird die Auffassung entwickelt, daß die Quantenmechanik in der Schrödingerschen Form nicht nur die stationären Zustände, sondern auch die Quantensprünge zu beschreiben gestattet.

Die von Heisenberg begründete Quantenmechanik ist bisher ausschließlich angewandt worden zur Berechnung der stationären Zustände und der den Übergängen zugeordneten Schwingungsamplituden (ich vermeide absichtlich das Wort „Übergangswahrscheinlichkeiten“). Dabei scheint sich der inzwischen weit entwickelte Formalismus gut zu bewähren. Aber diese Fragestellung betrifft nur eine Seite der quantentheoretischen Probleme; daneben erhebt sich als ebenso wichtig die Frage nach dem Wesen der „Übergänge“ selbst. Hinsichtlich dieses Punktes scheint die Meinung geteilt zu sein; viele nehmen an, daß das Problem der Übergänge von der Quantenmechanik in der vorliegenden Form nicht erfaßt wird, sondern daß hier neue Begriffsbildungen nötig sein werden. Ich selbst kam durch den Eindruck der Geschlossenheit des logischen Aufbaues der Quantenmechanik zu der Vermutung, daß diese Theorie vollständig sein und das Übergangsproblem mit enthalten müsse. Ich glaube, daß es mir jetzt gelungen ist, dies nachzuweisen.

Schon Bohr hat die Aufmerksamkeit darauf gerichtet, daß alle prinzipiellen Schwierigkeiten der Quantenvorstellungen, die uns bei der Emission und Absorption von Licht durch Atome begegnen, auch bei der Wechselwirkung von Atomen auf kurze Entfernung auftreten, also bei den Stoßvorgängen. Bei diesen hat man es statt mit dem noch sehr dunklen Wellenfeld ausschließlich mit Systemen materieller Teilchen zu tun, die dem Formalismus der Quantenmechanik unterliegen. Ich habe daher das Problem in Angriff genommen, die Wechselwirkung eines freien Teilchens ( $\alpha$ -Strahls oder Elektrons) und eines beliebigen Atoms näher zu untersuchen und festzustellen, ob nicht innerhalb des Rahmens der vorliegenden Theorie eine Beschreibung des Stoßvorganges möglich ist.

<sup>1)</sup> Diese Mitteilung war ursprünglich für die „Naturwissenschaften“ bestimmt, konnte aber dort wegen Raummangel nicht aufgenommen werden. Ich hoffe, daß ihre Veröffentlichung an dieser Stelle nicht überflüssig erscheint.

# Max Born (June 1926)

$\psi_n^0(x_0)$  ... die Eigenfunktionen des ungestörten Atoms (wir nehmen an, es gäbe nur eine diskrete Folge); dem ungestört (geradlinig) bewegten Elektron entsprechen die Eigenfunktionen  $\sin \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)$ , die eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit ebener Wellen bilden, deren Wellenlänge (nach de Broglie) mit der Energie  $\epsilon$  der Translationsbewegung durch die Relation  $\epsilon = \frac{h^2}{2\mu \lambda^2}$  verknüpft ist. Die Eigenfunktion des ungestörten Zustandes, bei dem das Elektron aus der  $+z$ -Richtung kommt, ist also

$$\psi_n^0(x, y, z) = \psi_n^0(x_0) \sin \frac{2\pi}{\lambda} z.$$

Nun sei  $V(x, y, z; t)$  die potentielle Energie der Wechselwirkung von Atom und Elektron. Man kann dann mit Hilfe einfacher Störungsrechnungen zeigen, daß es eine eindeutig bestimmte Lösung der Schrödingerschen Differentialgleichung bei Berücksichtigung der Wechselwirkung  $V$  gibt, die für  $z \rightarrow -\infty$  asymptotisch in obige Funktion übergeht.

Es kommt nun darauf an, wie diese Lösungsfunktion sich „nach dem Stoß“ verhält.

Nun ergibt die Rechnung, die durch die Störung erzeugte, gestreute Welle hat im Unendlichen asymptotisch den Ausdruck

$$\psi_n^0(x, y, z; t) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \int_{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0} d\alpha d\beta d\gamma \Phi_{\alpha, \beta, \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) \sin k_{\alpha, \beta, \gamma} (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) \psi_n^0(x_0).$$

Das bedeutet: die Störung läßt sich im Unendlichen auffassen als Superposition von Lösungen des ungestörten Vorgangs. Berechnet man die zur Wellenlänge  $\lambda_{\alpha, \beta, \gamma}$  gehörige Energie nach der oben angegebenen de Broglieschen Formel, so findet man

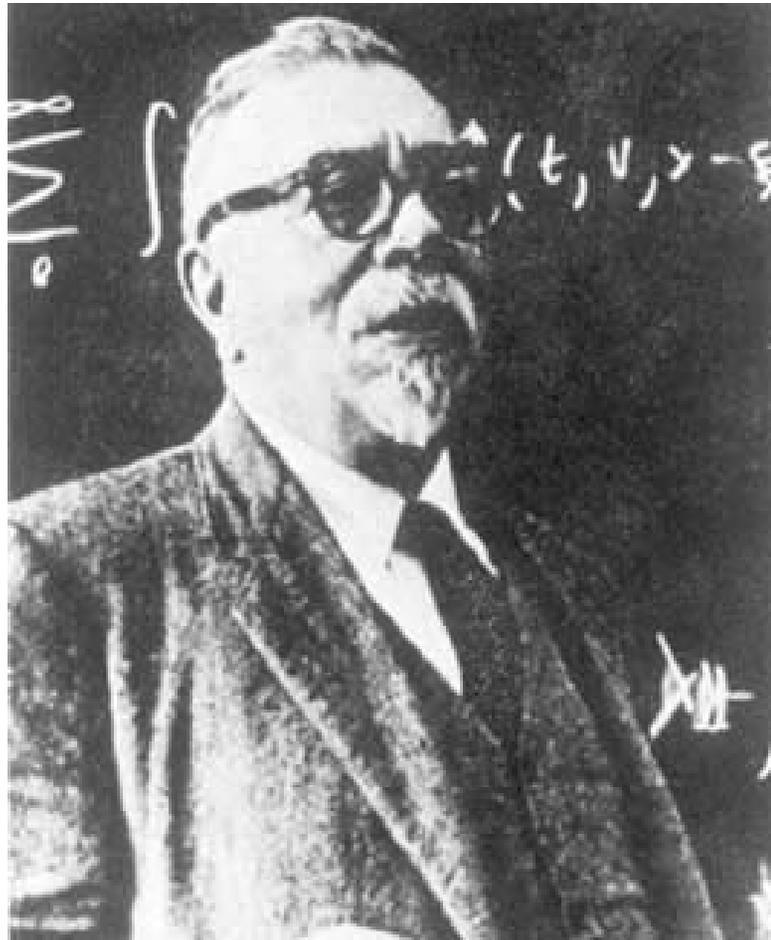
$$W_{\alpha, \beta, \gamma} = h^2 \nu_{\alpha, \beta, \gamma}^2 + \epsilon,$$

wobei  $\nu_{\alpha, \beta, \gamma}$  die Frequenzen des ungestörten Atoms sind.

Will man nun dieses Resultat korpuskular deuten, so ist nur eine Interpretation möglich:  $\Phi_{\alpha, \beta, \gamma}(\alpha, \beta, \gamma)$  bestimmt die Wahrscheinlichkeit<sup>1)</sup> dafür, daß aus der  $z$ -Richtung kommende Elektron in die durch  $\alpha, \beta, \gamma$

<sup>1)</sup> Anmerkung bei der Korrektur: Genauere Überlegung zeigt, daß die Wahrscheinlichkeit dem Quadrat der Größe  $\Phi_{\alpha, \beta, \gamma}$  proportional ist.

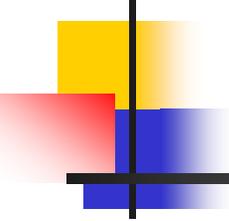
# Norbert Wiener



# Wiesner, Lee, Wiener



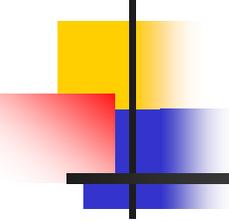
7/29/2003



# Representation-- Precision/Gradation

---

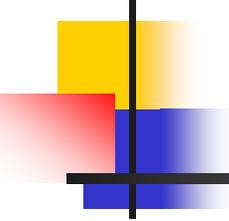
- “At the margins of precision, the Universe flickers.” (M. Black)
- How to think about measurement scales
- Empirical relational systems
- Mathematical relational systems
- Homomorphism for relations of likelihood, disjointness, and independence
- $P(A)$  is a real number and arithmetic operations  $+, \times$  are meaningful



# Precision/Gradation

---

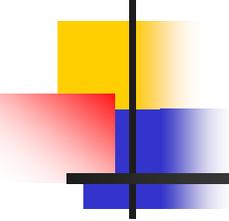
- P is interval-valued (prices??)
- P is a set of measures (meaning?)
- P is fuzzy-valued
- Probability is a binary relation of (partial) ordering--P maps events into a (partially) ordered set--“A is at least as probable as B”
- Probability is modal (“probably”) or classificatory



# Axioms and Mathematics

---

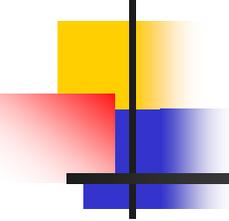
- Sine qua non or seduction?
- Good sense and rigor can be uneasy partners.
- Variety of realms and variety of meanings require a variety of axiom systems.
- Axioms are a tool for rendering overly precise our qualitative commitments to meaning and precision so that they can then be understood and explored.
- What don't the axioms tell us? Many models



# Outline of Reflections

---

- Pointing to the Subject of Probability
- Probabilistic Reasoning
- FoP Matters
- ToP
- Ruling Triumvirate
- Meaning
- Representation
- Axioms
- **Closing**



# “Take-Home” Thoughts

---

- The foundations of probability impact directly the applications of probability.
- Study of meaning (interpretation) is essential.
- Conscious choice of precision/gradation, matched to empirical phenomenon, is essential.
- Pride in imprecision, coarse-grainedness!
- Axioms and mathematics should not be an end in themselves in probability.
- Imprecise probability should not neglect objective physical/empirical chance.

# The Future of Foundations

